

Uma introdução à mecânica geométrica

Aline Leite Vilela D'Oliveira*

Resumo

Nesse projeto estudamos os fundamentos da mecânica geométrica com um enfoque voltado às simetrias de sistemas físicos. Tal formalismo foi aplicado ao movimento de corpos articulados e suas simetrias, sob o ponto de vista de uma teoria de gauge.

Palavras-chave:

mecânica clássica, métodos geométricos, geometria diferencial

Introdução

O estudo de simetrias é um tema recorrente em física e matemática. De fato, o estudo das simetrias de um problema frequentemente constitui-se em um atalho para se chegar às suas propriedades essenciais, isso é, aquelas associadas à sua estrutura mais fundamental.

Resultados e Discussão

A função Lagrangeana clássica é válida apenas em referenciais inerciais. Mas, substituindo a derivada temporal pela derivada covariante na Lagrangeana, a mesma passa a ser invariante sobre qualquer mudança de referencial. A nova lagrangiana será:

$$L(\vec{q}, \nabla_t \vec{q}, t) = \frac{1}{2} m (\nabla_t \vec{q})^2 - U = \frac{1}{2} m (\vec{q} + A_q \dot{\vec{q}} + \vec{v}_q)^2 - U, \quad [1]$$

onde $\nabla_t \vec{q} = \dot{\vec{q}} + A_q \dot{\vec{q}} + \vec{v}_q$ é a derivada covariante.

Assim, temos um importante exemplo de teoria de gauge, onde as matrizes e vetores da equação [1] são chamados de potenciais de gauge.

Usando a equação [1] podemos escrever a Lagrangeana de um corpo deformável no referencial do centro de massa do corpo:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\nabla_t \vec{q}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{q}_{\alpha} + \vec{v})^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\Omega} \times \vec{q}_{\alpha})^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\Omega} \times \vec{q}_{\alpha}) \cdot \vec{q}_{\alpha}. \quad [2]$$

A equação [2] mostra que a Lagrangeana pode ser decomposta em partes puramente rotacional e translacional, a primeira pode ser escrita na forma:

$$L_R = \frac{1}{2} \vec{\Omega} I \vec{\Omega} + \vec{L} \vec{\Omega}, \quad \text{onde } \vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{q}_{\alpha} \cdot \vec{q}_{\alpha}, \quad [3]$$

onde \vec{L} é o momento angular aparente e I o tensor de inércia.

Seja θ o ângulo de Euler que parametriza o referencial não inercial do centro de massa do corpo, temos, pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[(\vec{\Omega} + \vec{L}) \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \theta} \right] - (\vec{\Omega} + \vec{L}) \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \theta} = 0$$

$$(\vec{\Omega} + \vec{L})_i \cdot \Omega_j - (\vec{\Omega} + \vec{L})_j \cdot \Omega_i - \sum_k \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} + \vec{L})_k \epsilon_{ijk} = 0. \quad [4]$$

A equação [4] mostra que corpos deformáveis podem realizar rotações com momento angular nulo.

O sistema de duas varas da figura 1 é um exemplo de um corpo deformável, que tem momento angular:

$$L_z = \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m \sum_{i=1}^3 x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i. \quad [5]$$

Fazendo $\vec{L} = 0 \Rightarrow L_z = 0$ teremos:

$$d\theta = -(A_{\alpha} d\alpha + A_{\beta} d\beta), \quad \text{onde } A_{\alpha} = \frac{3+\cos\beta}{4+2\cos\beta} \text{ e } A_{\beta} = \frac{1+\cos\beta}{4+2\cos\beta}. \quad [6]$$

Aplicando o Teorema de Green em [6] temos que,

$$\Delta\theta = - \int_k \frac{\sin\beta}{2(2+\cos\beta)^2} d\alpha d\beta. \quad [7]$$

Realizando o ciclo $(\alpha, \beta) = (0, 0) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, 0) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ teremos de [8] que $\Delta\theta = -7,5^\circ$. O que está de acordo com a equação [5].

O sistema da haste e do cilindro da figura 1, um modelo simples para o gato, apresenta outro exemplo de corpo deformável. O momento angular de um corpo deformável no referencial do centro de massa do corpo é:

$$\vec{L} = I \vec{\Omega} + \vec{L}. \quad [8]$$

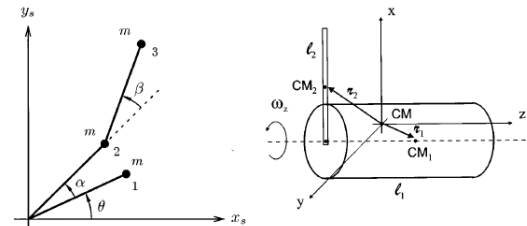


Figura 1. Sistema de duas varas à esquerda, retirada de [1]. Um modelo simples para o gato, à direita, retirada de [2].

Assim, quando o momento angular se anula,

$$\vec{\Omega} = I^{-1} \vec{L}. \quad [9]$$

Sejam I_1 e I_2 os momentos de inércia, respectivamente do cilindro e da barra, com respeito aos seus respectivos centros de massa. Temos, pelo teorema dos eixos paralelos, que a componente zz do tensor de inércia é:

$$I_{zz} = I_1 + I_2 + \frac{M}{4} (l_1^2 + l_2^2). \quad [10]$$

O momento angular aparente é dado pela rotação do cilindro em torno do seu eixo, $\vec{L} = L_z = -I_1 \omega_z$.

$$\text{Assim, de [9] e [10] temos } \vec{\Omega} = - \frac{I_1}{I_1 + I_2 + \frac{M}{4} (l_1^2 + l_2^2)} \omega_z.$$

Logo, como o corpo do gato tem velocidade angular $-\omega_z$ no referencial que roda com velocidade angular $\vec{\Omega}$, o gato roda com velocidade angular $\vec{\Omega} - \omega_z$ com respeito a um referencial inercial e pode pousar em pé.

Conclusões

Por meio de uma teoria de gauge estudou-se o movimento de corpos articulados (ou quase-rígidos). Assim, foi possível observar uma diferença fundamental entre corpos rígidos e corpos articulados: diferente do primeiro, o segundo pode realizar rotações mesmo quando o momento angular total do corpo é nulo.

Agradecimentos

A autora agradece ao CNPq pelo apoio financeiro.

¹ Littlejohn, Robert G., e Matthias Reinsch, *Reviews of modern physics* **1997**, 213, 69.1

² Lopez, L.F., e F. A. B. Coutinho, *American journal of physics* **1997**, 528-536, 65.6