Movimento Browniano Relativístico

Luisa Toledo Tude

Resumo
Neste projeto o movimento Browniano não relativístico foi estudado e simulado por diferentes abordagens. Das soluções obtidas para a densidade de probabilidade e sua variação com o tempo nota-se que existe probabilidade não nula de que a partícula se difunda com velocidade maior que a da luz, o que é impossível segundo a teoria da relatividade restrita. Assim foram investigados modelos alternativos que não contradizem a teoria da relatividade. Além disso, para tentar compreender como o movimento se alteraria caso fosse observado de um referencial relativístico, estudou-se termodinâmica relativística e as possíveis transformações de temperatura.

Palavras-chave:
Processos estocásticos, Relatividade, Termodinâmica.

Introdução

O movimento Browniano é o movimento irregular de partículas suspensas em um fluido. Este movimento se dá devido a choques entre a partícula e as moléculas do fluido que estão em constante agitação térmica. Para descrever deterministicamente o sistema, seria preciso saber as velocidades de todas as moléculas que se chocam com a partícula, o que é inviável. Assim modelos estocásticos fazem-se necessários.
Neste projeto diferentes abordagens do movimento Browniano foram estudadas, tais como a abordagem de Einstein, de Langevin, via equação de Fokker-Planck[1], o modelo de colisão binária e o modelo do oscilador harmônico. Estas abordagens levam à probabilidades não nulas de que a partícula Browniana se mova com velocidade maior que a da luz, o que vai contra a teoria da relatividade de Einstein. Outras abordagens, que visam corrigir tal contradição, foram então estudadas.
Ao tratar o movimento do ponto de vista de um observador em um referencial relativístico foi preciso analisar que leis regem a transformação das variáveis do problema.

Resultados e Discussão

A equação obtida por Einstein para a distribuição de probabilidades de posição no instante de tempo t de uma partícula Browniana é a equação de difusão, cuja solução é uma gaussiana que se alarga à medida que o tempo passa até que em um tempo muito longo a partícula fique com probabilidade aproximadamente igual de se encontrar em todas as posições.

$$\rho(x,t)=\sqrt{\frac{m\gamma}{4\pi K_B T t}}\,exp\left(\frac{-x^2 m\gamma}{4K_B T t}\right)$$

Nota-se que a largura da gaussiana também é diretamente proporcional a temperatura e inversamente proporcional ao coeficiente de viscosidade do líquido, como esperado.
O fato de a gaussiana tender a zero para posições no infinito implica que a partícula tem probabilidade diferente de zero de ter velocidade superluminal.
Uma alternativa a equação de difusão é a equação do telégrafo, que pode ser obtida considerando um termo a mais na expansão de $\rho(x,\ t)$ ou pelo modelo da caminhada aleatória persistente e cuja solução é uma gaussiana truncada por uma função delta de cada lado no ponto mais longínquo que se poderia alcançar sem sair do cone de luz. Com a evolução temporal a curva se alarga e as amplitudes das funções deltas diminuem.

Outras alternativas utilizam a distribuição de velocidades de Jüttner ao invés da de Maxwell Boltzmann seja no modelo de colisão binária ou para analisar a transição do caso não relativístico para o relativístico.
Outro fator a ser analisado é como o movimento mudaria se visto por um observador em um referencial relativístico. Para isto é preciso entender como a temperatura se alteraria para este referencial.
Existem três possíveis transformações para a temperatura. De acordo com Einstein e Planck a temperatura diminui, para Ott aumenta e para Landsberg e van Kampen trata-se de um invariante.O resultado de Einstein e Planck pode ser obtido analisando uma troca de calor a velocidade constante já o de Ott considerando a mesma situação, mas com momento constante.

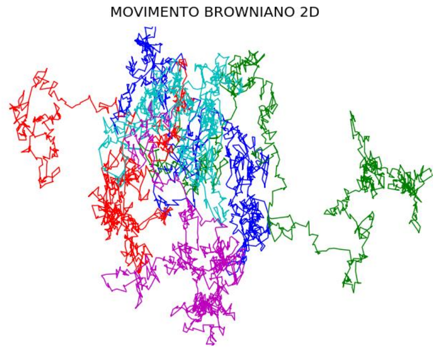

Figura 1. Simulação do caminho de cinco partículas suspensas em um fluido com mesma condição inicial.

Conclusões

Ainda que a solução da equação do telégrafo impeça velocidades superluminais, por possuir fontes singulares deslocando-se com a velocidade da luz, não é apropriada para sistemas massivos. Alternativas mais adequadas utilizam a distribuição de velocidades de Jüttner. Uma opção consiste em obter a densidade de probabilidade para o caso relativístico analisando a transição deste caso para o não relativístico. A solução se assemelha a uma gaussiana, mas zera para uma posição contida no cone de luz. Por isso descreve o sistema de forma condizente com a teoria da relatividade e pode ser utilizada para fins práticos.

Agradecimentos

A autora agradece ao CNPq pelo apoio financeiro e ao professor orientador.

[1]H.RISKEN. The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications.2 ed. Berlin:Springer-Verlag,**1984**.*454*.