
# Algoritmos de Aproximação para o problema de Alocação de p-Terminais e Variantes

**Vinícius Balbino de Souza*, Lehilton Lelis Chaves Pedrosa.**

**Resumo**
We consider the Capacitated p-Hub Center Problem. An instance comprises a metric space V, a set of demands $D \subseteq V^2$,a number of hubs p, and a capacity L. A solution is a multiset S of locations where to install hubs with $|S| \leq p$ and an assignment from each demand to a hub such that no hub receives more than L demands. The objective is to find a solution that minimizes the maximum cost of serving a demand through the assigned hub. In this work, we give the first approximation algorithm for the problem, that achieves factor 7.

***Palavras-chave:***
*Algoritmo de Aproximação, Problemas de Alocação de Terminais, Otimização Combinatória*

## Introdução

Problemas de aproximação e problemas de alocação de terminais aparecem na prática quando há demanda por fluxo de transporte e existe a necessidade de redução de custos total ou parcial, como em aeroportos ou correios.
Especificamente, o problema consiste em selecionar vértices mais importantes de um grafo G para alocar demanda de fluxo entre pares de vértices e minimizar a maior distância entre quaisquer pares de vértices pertencentes a demanda. Nesse projeto, estudamos uma variante do tradicional problema de alocação de terminais, adicionando um grau de dificuldade a ele, que corresponde a restrições de capacidade no número de vértices que podem ser atribuídos a um terminal.

## Resultados e Discussão

Em um problema de otimização, procuramos encontrar uma solução ótima dentro do conjunto bem definido de soluções. Definimos uma função real cujo domínio é o conjunto de todas as soluções viáveis. Chamamos essa função de função-objetivo. Dessa maneira, a melhor solução é aquela que possui o menor ou maior valor da função-objetivo. Tipicamente, o domínio não é definido de maneira explícita, mas definido como os elementos de um conjunto enumerável. Em muitos casos, não conseguimos calcular o valor da função objetivo para todos os elementos do domínio, pois em geral, a quantidade de elementos no conjunto solução é proibitivamente grande, como citaram Miyazawa e de Souza em 2015[1]. Como muitos problemas NP-difíceis têm relevância prática, normalmente procuramos alternativas para resolvê-los, mesmo de maneira não ótima. Exemplos são heurísticas, ou algoritmos de aproximação. Nossa contribuição é a primeira aproximação para o problema de alocação de terminais capacitados (p-CHP), com fator de aproximação 7. O algoritmo utiliza o método do gargalo apresentado por Hochbaum e Shmoys em 1986[1], em que se reduz um problema de um espaço métrico para o caso particular em que os pontos estão em um grafo sem pesos. Para lidar com as capacidades, criamos um particionamento de demandas e resolvemos um problema de fluxo máximo, baseando-se na árvore de monarcas de Khuller e Sussmann de 2000[3], utilizada em sua clássica 5-aproximação para o problema dos k-centros com capacidade.

O algoritmo foi apresentado oficialmente no II ETC (Encontro de Teoria da Computação), evento satélite do XXXVII CSBC (Congresso da Sociedade Brasileira de Computação), sendo selecionado entre os cinco artigos finalistas para a premiação de melhor artigo do evento. Além disso, o artigo que contém o algoritmo será publicado nos Anais do congresso. Formalmente, uma instância do p-CHP é dada por um grafo completo G com vértices V e métrica d, em que $d(x,y) \geq 0$ é a distância entre os vértices $x,y \in V$; um conjunto D de pares $(x,y) \in VxV$, em que cada um representa uma demanda entre os vértices x e y; um número inteiro p, que define o número de terminais a serem instalados; e um número L, cada um representando a capacidade de um terminal. Uma solução é um subconjunto S de elementos de V, com $|S| \leq p$, e uma função $\varphi : D \rightarrow S$, tal que $|\varphi^{-1}(v)| \leq L$ para todo $v \in S$ (i.e., φ associa no máximo L demandas a v). O objetivo é encontrar uma solução que minimiza a soma máxima entre $d(x,\varphi(x,y)) + d(\varphi(x,y),y)$, para toda demanda $D = (x,y)$. Provamos também no artigo que o algoritmo é executado em tempo polinomial e que ou ele retorna uma solução cuja distância entre uma demanda e o terminal associado a essa é no máximo $7\tau$, ou não há solução com aquele valor $\tau$.

## Conclusão

Por ser a primeira aproximação para o problema, os resultados são satisfatórios, porém, iniciamos agora uma jornada para novos desafios: analisar variantes mais complexas do problema. Nossa pesquisa continua e pretende encontrar um algoritmo de aproximação para o p-CHP capacitado com centros simples, quando apenas um terminal pode ser instalado por vértices.

## Agradecimentos

Agradecimentos ao CNPq/PIBIC pelo apoio ao trabalho. Ao IC-Unicamp pelo fornecimento de material didático sempre que necessário, e ao professor Lehilton Pedrosa, que se mostrou disposto a passar todo seu conhecimento.

[1]Miyazawa, F. K. and de Souza, C. C. **(2015)**. Introdução à otimização combinatória. In Anais da 34 a Jornada de Atualizac¸˜ao em Inform´atica JAI 2015.
[2]Hochbaum, D. S. and Shmoys, D. B. **(1986)**. A Unified Approach to Approximation Algorithms for Bottleneck Problems. J. ACM, 33(3):533–550.
[3]Khuller, S. and Sussmann, Y. J. **(2000)**. The Capacitated KCenter Problem. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 13(3):403–418.