



XXV Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

18 a 20 Outubro Campinas | Brasil



Álgebra de Lie do Grupo Linear Especial Real

Marcela Donaire Miyamoto*, Ronan Antonio dos Reis

Resumo

Este trabalho trata de um estudo introdutório em Teoria de Lie e Aplicações, em que foram estudados conceitos e resultados de grupos de Lie de matrizes e álgebras de Lie. O principal objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre o grupo linear especial real $SL(n, \mathbb{R})$ e sua álgebra de Lie. Este estudo aparece em várias áreas, tais como, em Geometria e Topologia, Teoria dos Grupos de Lie e Álgebras de Lie, entre outras.

Palavras-chave:

Álgebras de Lie, Grupos de Matrizes, Grupos de Lie

Introdução

A Teoria de Lie surgiu com Sophus Lie por volta de 1870 com o propósito de abordar as equações diferenciais do mesmo modo que as equações algébricas. Da descoberta de Sophus Lie dos grupos infinitesimais, atualmente chamados de álgebras de Lie, surgiram resultados que estabelecem relação entre os grupos de transformações (grupos de Lie) de natureza geométrica, e as álgebras de Lie, de natureza algébrica. Neste trabalho, foi realizado um estudo introdutório sobre essa Teoria, o qual tem como principal objetivo apresentar um estudo sobre o grupo linear especial real $SL(n, \mathbb{R})$ e sua álgebra de Lie. Este trabalho foi feito com base nas referências bibliográficas.

Resultados e Discussão

Seja $GL(n, \mathbb{C})$ o grupo linear de todas matrizes $n \times n$ invertíveis cujas entradas estão no corpo complexo \mathbb{C} , e seja $SL(n, \mathbb{R})$ o subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ de todas as matrizes reais $n \times n$ com determinante igual a 1.

Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 1: Um grupo de Lie de matrizes é um subgrupo fechado G de $GL(n, \mathbb{C})$.

Exemplo 1: Os grupos $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ são grupos de Lie de matrizes.

Definição 2: Seja G um grupo de Lie de matrizes. O espaço tangente de G na identidade I de G , denotado por $\mathfrak{g} = T_I G$, é o conjunto $\{\gamma'(0) | \gamma \text{ é curva diferenciável em } G \text{ com } \gamma(0) = I\}$.

Definição 3: Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial \mathfrak{g} sobre um corpo \mathbb{K} munido de um produto (colchete de Lie) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ com as seguintes propriedades:

i) $[\cdot, \cdot]$ é bilinear, isto é, dados quaisquer $a, b \in \mathbb{K}$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, segue que

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

e

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

ii) $[\cdot, \cdot]$ é antissimétrico, isto é, dado $X \in \mathfrak{g}$,

$$[X, X] = 0$$

e

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

iii) $[\cdot, \cdot]$ satisfaz a identidade de Jacobi, isto é,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 2: O espaço $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ de traço 0 é uma álgebra de Lie de matrizes com o colchete $[X, Y] = XY - YX$.

Teorema 1: Seja G um grupo de Lie de matrizes. Então, o par $(T_I G, [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra de Lie.

Definição 4: Com as definições anteriores, a álgebra de Lie \mathfrak{g} é o espaço tangente $T_I G$ com o colchete $[\cdot, \cdot]$.

Temos a seguinte proposição:

Proposição 1: O espaço $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ com o colchete $[\cdot, \cdot]$ é a álgebra de Lie do grupo $SL(n, \mathbb{R})$.

Conclusões

A partir do estudo de tópicos de grupos de matrizes e álgebras de Lie, mostramos que a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é a álgebra de Lie do grupo $SL(n, \mathbb{R})$.

Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro.

¹Baker, A. *Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory*. Springer-Verlag, 2002.

²Curtis, M. L. *Matrix Groups*. 2. ed. New York: Springer, 1984.

³San Martin, L. A. B. *Álgebras de Lie*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2010.

⁴San Martin, L. A. B. *Notas de grupos de Lie*, Unicamp, 2012.