Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes em Dimensão 2: o Caso das 3 Zonas

Mayara Duarte de Araujo Caldas*, Ricardo Miranda Martins.

Resumo

Neste projeto estudamos o caso dos Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes em 3 zonas no plano, analisando as situações em que as zonas são delimitadas por regiões do tipo 1: duas retas paralelas não-coincidentes e do tipo 2: três semi-retas iniciando na origem. Na primeira etapa, estudamos as principais propriedades de sistemas de cada um dos tipos e, posteriormente, comparamos a localização de ciclos limite, analisando como a geometria da zona afeta a existência destes.

Palavras-chave:

Sistemas Dinâmicos, Ciclo Limite, Sistemas Não-Suaves.

Introdução

A teoria dos Sistemas Dinâmicos Não-Suaves vem ganhando destaque em diversas aplicações, como na mecânica, engenharia aeroespacial, física, economia, entre outros. Isto motivou um avanço rápido em seu desenvolvimento nos últimos anos.

Em diversas situações, os Sistemas Dinâmicos Não-Suaves são descritos por sistemas de equações diferenciais suaves por partes, definidas em certas regiões do retrato de fase, separados por interfaces, chamadas regiões de descontinuidade. Sistemas deste tipo possuem grande importância, além de apresentarem uma dinâmica muito rica e a vantagem de que a solução de cada parte contínua pode ser encontrada analiticamente.

Resultados e Discussão

Apoiados na literatura e em softwares, como o MatLab e o Maple, consideramos em nosso estudo Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes em 3 zonas da forma:

$$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$$

onde F e G são funções lineares não necessariamente contínuas em cada uma das regiões dos tipos abaixo:

Tipo 1: duas retas paralelas não-coincidentes. Considerando as regiões:

1) $\{(x,y) \in R^2; x < -1\}$,
2) $\{(x,y) \in R^2; -1 < x < 1\}$,
3) $\{(x,y) \in R^2; x > 1\}$,

sendo $x = -1$ e $x = 1$ as variedades de descontinuidade. Restringimos nossos estudos ao caso sela-foco-sela, onde inicialmente estudamos o comportamento do sistema com o objetivo de determinar as regiões sobre as variedades de descontinuidade. Em seguida, mostramos que o sistema admite pelo menos um ciclo limite.

Tipo 2: três semirretas iniciando na origem. Considerando as regiões:

1) $\left\{(r,\theta) \in R^2; r > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$,
2) $\left\{(r,\theta) \in R^2; r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{4}\right\}$,
3) $\left\{(r,\theta) \in R^2; r > 0, \frac{5\pi}{4} < \theta < 2\pi\right\}$,

onde as semirretas $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{5\pi}{4}$ e $\theta = 2\pi$ são as variedades de descontinuidade. Consideramos o caso centro-foco-sela, onde as singularidades são visíveis. Encontramos as regiões sobre as variedades de descontinuidade e em seguida mostramos a existência de pelo menos um ciclo limite nesse caso.

Conclusões

Concluímos que em ambos os sistemas dos tipos 1 e 2, existe uma superfície de codimensão 1 no espaço dos parâmetros de modo que se os parâmetros do sistema estão na superfície, então o sistema admite pelo menos 1 ciclo limite.

Agradecimentos

Ao professor Dr. Ricardo Miranda Martins, pela orientação, ajuda e confiança.

À minha família, pelo apoio e incentivo.

Ao PIBIC/CNPq por ter financiado esta pesquisa.

Ponce, E. *Bifurcations in piecewise linear system: case studies*. Notas de Minicurso, MAT70, IMEEC, **2014**.

[2] Makarenkov, O.; Lamb, J. S. W. *Dynamics and bifurcations of non smooth systems: a survey*. Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 241, 1826-1844, **2012.**

[3] Artés, J. C.; Dumortier, F.; Llibre, J. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer-Verlag, **2006**.

[4] Filippov, A. F. *Differential equations with discontinuous righthand sides.* Vol. 18 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, **1988**.