Álgebras Associativas:

Guilherme Sant'Ana Plais*, Plamen Koshlukov.

Resumo

Neste trabalho foi feito um estudo das álgebras associativas. Num primeiro momento, foi estudado o Teorema de Frobenius, a estrutura de anéis e álgebras: anéis primos e semiprimos, ideais nil e nilpotentes, álgebras semissimples e o Teorema de Wedderburn e Artin. Em seguida usando o conceito de módulos sobre álgebras foi possível deduzir o Lema de Schur e, após o estudo de módulos semissimples, estender o Teorema de Wedderburn já visto. Por fim, mais algumas propriedades de anéis e ideais: primitivos e semiprimitivos. Para então encontrar um teorema ainda mais geral que os vistos anteriormente, o teorema de Jacobson sobre a densidade.

Palavras-chave:

Álgebras associativas, estrutura de anéis e álgebras, teorema de Wedderburn e Artin.

Introdução

Ao estudar anéis ou álgebras associativas é imprescindível passar por outras estruturas algébricas, como grupos, espaços vetoriais e módulos, que são usadas hora como ferramentas para obter resultados sobre as álgebras, hora como exemplos de aplicação.

O primeiro resultado importante é o Teorema de Frobenius, seguindo passamos para o estudo de algumas propriedades das álgebras e anéis de dimensão finita, que permitem encontrar o Teorema de Wedderburn e Artin, além do Lema de Schur.

Por fim, vamos para anéis primitivos, sem supor dimensão finita, e encontramos então um teorema ainda mais geral que o de Wedderburn e Artin sobre sua estrutura.

O objetivo de tal trabalho é aprofundar os conceitos sobre estruturas algébricas e aprender relações entre elas, além de aumentar a cultura matemática geral. Já que estas estruturas são utilizáveis em todas as áreas da matemática.

Resultados e Discussão

Inicialmente foi feito um estudo de anéis e álgebras simples e o Teorema de Frobenius o qual descreve as álgebras de divisão e de dimensão finita sobre os reais. Seguindo no estudo da estrutura das álgebras, são usadas as propriedades de anéis e álgebras primos e semiprimos, ideais nil e nilpotentes, idempotentes e álgebras semissimples para encontrar e compreender uma forma mais "ingênua" do Teorema de Wedderburn e Artin, para álgebras simples de dimensão finita, que posteriormente é estendido utilizando o conceito de módulos sobre álgebras.

Trabalhando com módulos sobre álgebras, encontramos, além de algumas propriedades de módulos simples, espaços vetoriais, endomorfismos e matrizes, o Lema de Schur, para só então estender o Teorema de Wedderburn e Artin., agora sobre a estrutura de álgebras semiprimas de dimensão finita.

Finalmente passamos para o estudo de anéis e ideais primitivos e Radical de Jacobson para conseguir um teorema de estrutura ainda mais forte, sem a suposição de dimensão finita. Este é o teorema sobre a densidade de Jacobson, ele relaciona os anéis primitivos com anéis de transformações lineares em espaços vetoriais, e utiliza alguns conceitos topológicos. O teorema mostra que todo anél primitivo é denso num anel de transformações lineares em algum espaço vetorial sobre anel de divisão.

O método utilizado durante todo o trabalho foi o de estudo dirigido, com reuniões semanais para discutir o que foi aprendido e as dúvidas que surgiram a partir, principalmente, da leitura do livro [1]. Além do material teórico do livro, foram feitos os exercícios que acompanham cada um dos capítulos estudados. Esses exercícios ajudaram em muito para uma melhor compreensão da parte teórica e mostraram várias aplicações interessantes e importantes.

Conclusão

Os objetivos do projeto inicial foram alcançados, adaptados ao período do desenvolvimento da pesquisa. Foi visto que a estrutura dos anéis associativos está relacionada à dos anéis de transformações lineares, sob algumas restrições naturais. Foram estudados conceitos importantes da teoria das álgebras associativas, que poderão ser úteis no estudo, bem como numa possível pós-graduação.

Agradecimentos

Este trabalho foi desenvolvido com apoio financeiro do CNPq, através do PIBIC, Pró-Reitoria de Pesquisa, UNICAMP.

---

[1] M. Bresar, *Introduction to Noncommutative Algebra. Universitext, Springer,* ***2014.***