Teorema da Vizinhança Tubular de Weinstein

Leonardo Schultz Araujo*, Lino Grama.

Resumo
Neste trabalho apresentaremos um importante resultado da geometria simplética, o teorema da vizinhança tubular de Weinstein, que relaciona uma subvariedade lagrangiana de uma variedade simplética M com seu mergulho na seção zero do fibrado cotangente T^*M.

Palavras-chave:
Geometria simplética, Subvariedades lagrangianas, Teorema da vizinhança tubular de Weinstein.

Introdução

Seja ω uma 2-forma diferenciável em uma variedade M, i.e para cada $p \in M$, a aplicação $w_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é bilinear e antissimétrica no espaço tangente a M no ponto p, e w_p é suave em p. Dizemos que ω é fechada se satisfaz a equação diferencial $d\omega = 0$, onde d é a derivada exterior.
Uma 2-forma diferenciável é simplética se ω é fechada e para cada p, w_p é não degenerada.
Uma variedade simplética é um par (M, ω), onde M é uma variedade diferenciável e ω é simplética.
Dizemos que uma subvariedade $X \subset M$ é lagrangiana se, dada a inclusão $i : X \to M$, $i^*w = 0$ e $\dim X = (1/2)\dim M$.
Nosso objetivo é estudar a relação entre uma subvariedade lagrangiana $X \subset M$ de uma variedade simplética M compacta e seu mergulho na seção zero do fibrado cotangente T^*M munido com a estrutura simplética canônica.

Resultados e Discussão

Primeiramente vejamos que se M é uma 2n-variedade, ω_0 e ω_1 são formas simpléticas em M e X é subvariedade lagrangiana de (M, ω_0) e (M, ω_1), então existem vizinhanças U_0 e U_1 de X em M e um difeomorfismo $\phi : U_0 \to U_1$ tal que $\phi(x) = x, \forall x \in X$ e $\phi * w1 = w0$.
Para isto, utilizaremos o seguinte teorema:

Teorema de Moser: Seja M uma variedade, X uma subvariedade compacta de M, $i : X \to M$ inclusão, ω_0 e ω_1 formas simpléticas tais que $\omega_0|_p$ e $\omega_1|p, \forall p \in X$. Então existem vizinhanças U_0 e U_1 de X em M, e um difeomorfismo $\phi : U_0 \to U_1$ tal que $\phi(x) = x, \forall x \in X$ e $\phi * w1 = w0$.

Fixe $p \in X$. Seja $V = T_pM$ e $U = T_pX$. Se $i : X \to M$ é inclusão, uma vez que $i^*w_0 = i^*w_1 = 0$, segue que U é um subespaço lagrangiano de $(V, w_0|_p)$ e $(V, w_1|_p)$. Podemos então obter um isomorfismo$L_p : T_pM \to T_pM$, tal que $L_p|T_pX = \mathrm{Id}$ e $L_p^* w_1|_p = w_0|_p$, de modo que L_p é diferenciável em p.

Pelo teorema de Whitney, existe uma vizinhança N de X e um mergulho $h : N \to X$, com $h|_x = \mathrm{Id}$ e $dh(p) = L_p$, $p \in X$. Desta forma, para cada $p \in X$,
$(h^*w_1)_p = (dh(p))^* w_1|_p = L_p * w_1|_p = w_0|_p$.
Aplicando o teorema de Moser a w_0 e $h * w_1$, encontramos uma vizinhança U_0 de X e um mergulho $f : U_0 \to N$ tal que $f|_X = \mathrm{Id}$ e $f^*(h^*w_1) = w_0$ em U_0.
Basta tomarmos então $\phi = h \circ f$, donde obtemos nosso resultado.

Considere então (M, ω) variedade simplética compacta , X uma subvariedade lagrangiana de M, e (T^*M, ω_0) o fibrado cotangente de M munido de ω_0, estrutura simplética canônica. Utilizando o teorema da vizinhança tubular e identificando $NX \simeq T^*X$, onde NX é o fibrado normal de X, obtemos um difeomorfismo $\psi : V_0 \to V$, onde V_0 é vizinhança de X em T^*X, com X visto como seção zero do fibrado, e V é vizinhança de X em M.
Aplicando o resultado anterior para $\psi^*\omega$ e ω_0, obtemos $\phi : V_0 \to U_1$ tal que $\phi^*\psi^*\omega = (\psi \circ \phi)^* w = w_0$. Donde temos que $\theta = \psi \circ \phi$ é um difeomorfismo tal que $\theta(x) = x, \forall x \in X$ e $\theta^* w$ é a forma simplética canônica.

Conclusão

Chegamos então a uma demonstração do seguinte teorema:
Teorema da vizinhança tubular de Weinstein: Seja (M, ω) uma variedade simplética compacta e X uma subvariedade lagrangiana de M. Então existe uma vizinhança U_0 da seção zero do fibrado T^*X, uma vizinhança U de X em M e um difeomorfismo $\theta : U_0 \to U$ tal que $\theta(x) = x \; \forall x \in X$, e $\theta^*\omega$ é a forma simplética canônica.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq/PIBIC pelo financiamento desta pesquisa.

[1]MACARINI, Leonardo (Coaut. de); BURSZTYN, Henrique. Introdução a geometria simpletica. Rio de Janeiro, RJ; São Paulo, SP: IMPA: USP, 2006.

[2]da Silva, A.C.: Lectures on Symplectic Geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1764. Springer, Berlin (2001)

[3]Weinstein, A., Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, Advances in Math. 6(1971), 329–346.