Uma introdução à Holonomia

Hugo Ricardo Ribeiro Matarozzi*, Rafael de Freitas Leão

Resumo
Neste trabalho é realizado um estudo da relação entre curvatura e holonomia em uma superfície com o uso do transporte paralelo, das formas de conexão e do teorema de Gauss-Bonnet. Esta relação é explicitada no caso particular de uma superfície formada pela união das extremidades de dois planos finitos retangulares idênticos ("travesseiro").

Palavras-chave:
Holonomia, Variedades, Geometria Diferencial.

Introdução

Nesta iniciação científica em geometria diferencial, trabalhamos principalmente com superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, com a eventual generalização dos conceitos mais importantes para variedades diferenciáveis.
Dada uma curva diferenciável $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ sabemos que sua curvatura é dada por:

$$k = \frac{||\gamma''||}{||\gamma'||} \tag{1}$$

Para uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, podemos observar a curvatura de curvas contidas em S que passam por um ponto p, e tomar as de curvatura máxima e mínima, denotadas por k_1 e k_2 respectivamente, chamadas de curvaturas principais. Podemos assim definir um invariante geométrico chamada curvatura gaussiana, denotada por K:

$$K = k_1 k_2 \tag{2}$$

O problema aparece quando tentamos trabalhar com superfícies não diferenciáveis, como um cone. Podemos construir um cone a partir de uma figura plana, enrolando-a. Assim, a curvatura gaussiana no corpo do cone permanece nula, enquanto no bico não temos uma descrição satisfatória. Desta maneira, é necessário pensar em outra descrição para curvatura, que se aplique a essas singularidades.

Resultados e Discussão

Dado um vetor v tangente à S, chamamos de transporte paralelo o transporte de v ao longo de uma curva de modo que o vetor resultante seja paralelo à v.
Dada uma curva $\gamma \subset S$ com aceleração nula o transporte paralelo é realizado com facilidade, pois o ângulo entre o vetor e a curva se mantém constante. Chamamos esta curva de geodésica, que é análoga à reta no plano.
Tome então uma curva fechada $\gamma \subset S$ composta por geodésicas. Ao realizar transporte paralelo de um vetor tangente por γ por um ciclo, o ângulo entre o vetor inicial e o vetor após o transporte é o chamado ângulo de holonomia. Sabemos que holonomia e curvatura se relacionam quando em uma superfície diferenciável por:

$$\phi_{hol} = \iint_{int\gamma} K dS \tag{3}$$

Onde $int\gamma$ é, naturalmente, a região interior à curva fechada γ. Queremos então usar holonomia como definição alternativa de curvatura para superfícies não diferenciáveis. Tome por exemplo um travesseiro. No corpo do travesseiro a curvatura gaussiana é nula, e temos quatro cones: um em cada extremidade. Para uma curva fechada γ em torno do ponto singular de um cone, o ângulo de holonomia é dado por:

$$\phi_{hol} = \theta \tag{4}$$

Onde θ é o ângulo de abertura do cone quando no plano. Assim, no caso de um travesseiro ($\theta = \pi$), somamos os ângulos referentes aos quatro bicos e obtemos um total de 4π. Lembrando do teorema de Gauss-Bonnet para superfícies sem fronteira, e notando que o travesseiro é homeomeorfo à esfera, temos:

$$\iint_S K dS = 2\pi\chi(S) = 4\pi \tag{5}$$

Assim obtemos (3), agora com a integral realizada sobre toda a superfície, que envolve a curvatura pelo corpo do travesseiro (nula) e a soma dos ângulos de holonomia de cada bico. Dessa maneira, vemos que (3) pode ser pensada também para o caso não diferenciável.

Conclusão

A partir do discutido, concluímos que é holonomia é uma boa forma de generalizar curvatura.

Agradecimentos

Agradeço ao PIBIC/CNPq por financiar esta pesquisa.

---

[1] O'NEILL, Barrett. *Elementary differential geometry.* Rev. 2nd ed. Amsterdam: Academic Press, **c2006**. 503 p.

[2] LEE, John M. *Introduction to smooth manifolds.* New York, NY: Springer, **c2003**. 628 p.