XXIV congresso de iniciação científica da unicamp
19a21out Campinas Brasil

Introdução à Teoria de Lie via exemplos: geometria de órbitas adjuntas de SL(2,R)

Leonardo Schultz Araujo*, Lino Grama.

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas propriedades da geometria de órbitas adjuntas de $SL(2,\mathbb{R})$. Tais órbitas aparecem naturalmente no estudo de geometria simplética e sistemas dinâmicos.

Palavras-chave:

Órbitas adjuntas, geometria simplética, Álgebras de Lie, Morse-Smale.

Introdução

Considere a representação adjunta sobre o grupo $SL(2,\mathbb{R})$ e sua álgebra de Lie associada $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, definida por: $Ad: SL(2,\mathbb{R}) \to Aut(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ tal que, $Ad(g)h = ghg^{-1}$.

Nosso objetivo é analisar as propriedades geométricas de cada umas das órbitas desta representação. Onde, em uma das órbitas, mostraremos ser possível obter uma estrutura simplética. Além disso, estudando o comportamento de um campo gradiente sobre uma das órbitas, veremos como a compacidade é uma hipótese indispensável no teorema de Morse-Smale.

Resultados e Discussão

Tomando a seguinte base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos que as órbitas de Ad são da seguinte forma, onde $H = xA + yB + zC$,

Hiperboloide de uma folha:

$\mathcal{O}^1 = \{H : x^2 + y^2 = z^2 + \lambda^2, \lambda \neq 0\}$;

Cone:

$\mathcal{O}^2_+ = \{H : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$;

$\mathcal{O}^2_- = \{H : x^2 + y^2 = z^2, z < 0\}$;

$\mathcal{O}^2_0 = \{0\}$;

Hiperboloide de duas folhas:

$\mathcal{O}^2_+ = \{H : x^2 + y^2 = z^2 - \lambda^2, z > 0 \text{ e } \lambda \neq 0\}$;

$\mathcal{O}^2_- = \{H : x^2 + y^2 = z^2 - \lambda^2, z < 0 \text{ e } \lambda \neq 0\}$;

Mostramos ser possível obter, sobre a órbita $\mathcal{O}^1$ uma estrutura simplética induzida pela representação coadjunta. De modo que para $\xi \in \mathfrak{g}^*$definimos a forma bilinear antissimétrica em $T_\xi\mathcal{O}^1$ por:

$\omega_\xi(ad^*_u(\xi), ad^*_v(\xi)) := \xi([u,v])$.

Usando que o hiperboloide de uma folha é uma superfície duplamente regrada, analisamos o campo gradiente gerado pela forma quadrática $f(x,y,z) = yz$ restrito a órbita $\mathcal{O}^1$. Onde observamos o comportamento das variedades estáveis e instáveis no plano tangente a órbita, nos pontos $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$.

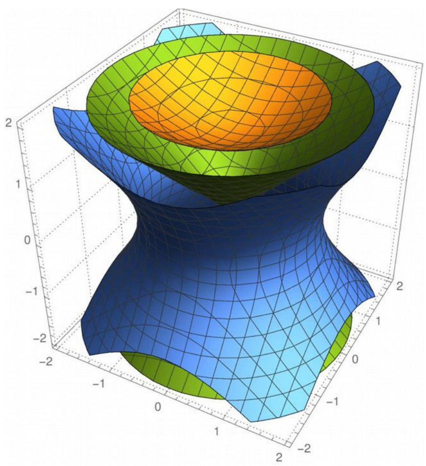

Figura 1. Hiperboloide de uma folha (azul), hiperboloide de duas folhas (amarelo) e cone (verde).

Conclusão

Um importante resultado em sistemas dinâmicos/geometria é o Teorema de Morse-Smale:

Teorema. Seja Muma variedade diferenciável compacta sem fronteira, e f uma função de Morse. Se $\phi_p(t)$ é a trajetória dada pelo campo gradiente gerado por ∇f no ponto $p \in M$, então os limites, $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_p(t)$ e $\lim\limits_{t\to-\infty} \phi_p(t)$ existem e são pontos críticos de f.

O exemplo estudado neste trabalho de campo gradiente na órbita adjunta $\mathcal{O}^1$, mostra que a hipótese da variedade ser compacta no teorema é essencial, uma vez que encontramos trajetórias nesta órbita as quais, no limite, divergem.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq/PIBIC pelo financiamento desta pesquisa.

---

[1]MACARINI, Leonardo (Coaut. de); BURSZTYN, Henrique. Introdução a geometria simpletica. Rio de Janeiro, RJ; São Paulo, SP: IMPA: USP, 2006. 98p., il.

[2]LIMA, Elon Lages. Variedades diferenciáveis. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1973. 369 p., il.