Modelos de Crescimento

Matheus Q. Zabin*, Lúcio T. dos Santos.

Resumo

Quando se estuda o crescimento de certas entidades (populações celulares, volume de um tumor, população de indivíduos, etc.) em função do tempo, existem certas característica importantes a serem notadas para que esses fenômenos sejam devidamente descritos, como a existência de uma taxa de crescimento, uma taxa de perda e em alguns casos, um valor máximo para o tamanho de tal entidade, caraterizando um crescimento limitado, que é o foco de estudo deste projeto.

Palavras-chave:

Curvas de crescimento limitado, equações diferenciais ordinárias, ajuste de curvas não-lineares.

Introdução

Os modelos de crescimento são descritos por problemas de valor inicial que possuem em sua estrutura algumas constantes empíricas, i.e., informações que podem ser obtidas através dos dados experimentais, como por exemplo, sua dimensão inicial, dimensão final e algumas constantes de crescimento.

No trabalho, foram tratados modelos que seguem a forma geral,

$$\frac{dx}{dt} = rx\, f\left(\frac{x}{x_M}\right), \quad x(0) = x_0, \qquad (1)$$

onde x é o tamanho da entidade, t é a variável temporal, x_0 o tamanho inicial, x_M o tamanho final e r uma constante de crescimento. A função f deve ser suave decrescente em $(0,\infty)$ e ter $f(1)=0$.

Foram estudados meios de ajustar os modelos de crescimento aos dados experimentais, desde os casos mais usuais na literatura até os mais gerais, aonde não se possui uma solução analítica do problema de valor inicial (1) associado .

Resultados e Discussão

Foram realizadas análises dos modelos mais conhecidos na literatura, como a equação logística, o modelo de Benjamin-Gompertz e o modelo empírico de F. J. Richards, buscando entender a influência das constantes envolvidas no formato das curvas de solução.

Para realizar o ajuste dos modelos aos dados, procurou-se minimizar o resíduo R entre os dados experimentais e a curva de solução do modelo de crescimento, dado por,

$$R(r, x_M, x_0) = \sum_{i=1}^{n} (x(t_i) - x_i)^2, \qquad (2)$$

onde $x(t)$ é a solução do modelo, t_i são as variáveis temporais dos dados experimentais e x_i são os valores dimensionais dos dados experimentais.

Quando o problema (1) possui solução analítica, basta calcular os valores de $x(t)$ em (2) e resolver o sistema não-linear associado. Porém, surge uma complicação quando o problema (1) não possui solução analítica conhecida. Neste caso, é necessário acessar valores de $x(t)$ através da equação diferencial associada, utilizando por exemplo o método de Runge-Kutta de quarta ordem, que é um processo muito mais custoso em termos computacionais visto que os valores de $x(t)$ serão acessados a cada iteração do método de resolução do sistema não-linear associado.

Na Figura 1, podemos ver de ajuste da equação logística aos dados do crescimento de uma população celular[1] em função do tempo. A equação logística é obtida tomando $f(x) = 1 - x$ no problema (1).

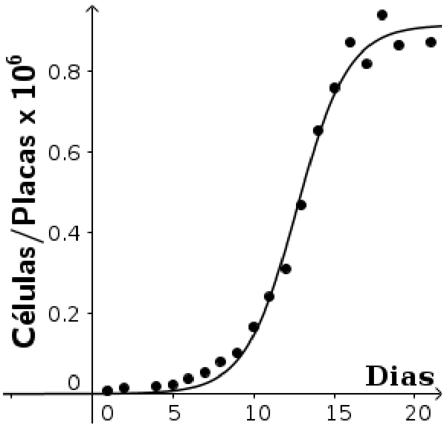

Figura 1. Ajuste da equação logística ao crescimento de uma população celular.

O ajuste encontrou os valores ótimos de x_0, x_M e r para que o resíduo entre a curva e os dados seja mínimo.

Uma análise muito útil que foi feita a posteriori, é da quantidade de dados experimentais que podem ser restritos de forma que ainda se preserve uma curva aproximada à feita com todos os dados disponíveis.

Conclusão

Com o intuito de manter a aplicabilidade do que foi estudado, o trabalho sempre buscou considerar condições de restrição nos dados experimentais, e realizar análises com base nestas restrições, de tal forma a refletir aplicações dos modelos de crescimento em situações reais.

---

[1] GREENE, Lloyd A.; TISCHLER, Arthur S. *Establishment of a noradrenergic clonal line of rat adrenal pheochromocytoma cells which respond to nerve growth factor*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 1976. Vol. 73, No. 7, 2424-2428 p.