XXIV Congresso de Iniciação Científica da Unicamp
19 a 21 out Campinas Brasil

Construção de processos de difusão com aplicações em séries financeiras

Nathália Menini Cardoso dos Santos*, Laura Letícia R. Rifo

Resumo
Neste projeto de Iniciação Científica aprofundamos o conhecimento em tópicos de modelagem probabilística e inferência estatística, com ênfase na modelagem de séries temporais mediante processos estocásticos de difusão provenientes do movimento Browniano. Para o claro entendimento da construção de tais processos, foi fundamental uma rigorosa revisão bibliográfica em conceitos de teoria da medida, processos estocásticos, cadeias de Markov e a assimilação de dois importantíssimos teoremas (Extensão do Teorema de Kolmogorov e Teorema da Continuidade de Kolmogorov). Depois de compreender esses conceitos, definiu-se e justificou-se o movimento browniano (MB), exemplificando com simulações computacionais. Por fim, foi feita uma análise empírica a cerca das simulações e de algumas séries financeiras para verificar-se quais seriam os comportamentos esperados de tais processos.

Palavras-chave:
Teoria da medida, processos estocásticos, movimento browniano.

Introdução

Em qualquer análise estatística é fundamental que o pesquisador adote ferramentas apropriadas e eficientes para obter uma solução clara e precisa sobre o problema em questão. Para isso, comumente utiliza-se conceitos de séries temporais, que é basicamente uma coleção de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo. Uma característica muito importante para este tipo de dados é que as observações vizinhas são dependentes e é de interesse incorporar esta estrutura de correlação na modelagem.

Neste projeto tivemos como objetivo entender a construção de um processo de difusão, mais especificamente o MB, que pode ser utilizado para modelar esses tipos de dados. Além disso, verificamos também o comportamento empírico de tais modelos simulados computacionalmente.

Resultados e Discussão

Na primeira parte do projeto focamos em entender os elementos de teoria da medida. Inicialmente, definimos uma álgebra e em seguida, aprofundamos nosso conhecimento sobre σ-álgebra, como por exemplo, σ-álgebra de Borel. A partir daí, foi possível definir espaços de probabilidade e função de conjuntos, fundamentais para compreender os resultados a seguir. Posteriormente, definimos o conceito de medida, e estudamos a medida de Lebesgue, importantíssimas formulações para a compreensão de medida produto.

Em um segundo momento, realizamos uma breve introdução aos processos estocásticos e sobre cadeias de Markov, para que assim, o entendimento do movimento browniano fosse completo.

Finalmente, definimos e simulamos o MB em uma e duas dimensões. Da definição, temos que o MB em uma dimensão é composto por um somatório acumulado de sequencias de deslocamentos aleatórios normalmente distribuídos, ou seja, o MB pode ser simulado pela soma de sucessivos termos de variáveis aleatórias normalmente distribuídas e enumadas:

$$X(0) \sim N(0,1)$$

$$X(1) \sim X(0) + N(0,1)$$

$$X(2) \sim X(1) + N(0,1)$$

$$\ldots$$

em que cada distribuição normal, N(0,1), é independente uma da outra. Na Figura 1 apresentamos o MB simulado em uma dimensão para 1000 observações no intervalo (0,1]. Nota-se que o comportamento do gráfico se assemelha com o MB em uma situação real.

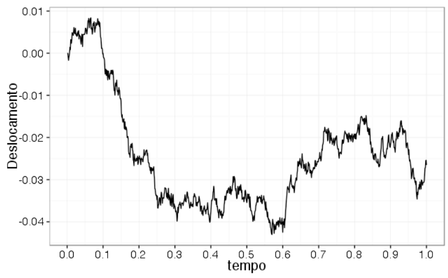

Figura 1. Movimento Browniano em uma dimensão no intervalo (0,1].

Conclusões

Através desse trabalho aprofundamos os conhecimentos em teorias de probabilidade e elementos da medida, que são importantíssimos para a formação de um estatístico. Além disso, revimos processos estocásticos e cadeias de Markov, conceitos fundamentais na área teórica e de modelagem. Por fim, construímos um processo de difusão, conhecido por MB, que possibilita a modelagem de dados correlacionados no tempo.

Agradecimentos

Agradeço à professora Laura pela oportunidade e pelo aprendizado; aos meus familiares e amigos pelo apoio e à instituição CNPq pelo programa e fomento.

[1] Karlin, S.; Taylor, H. *A First Course in Stochastic Processes.* 1975.
[2] Resnick, S. *A Probability Path.* 2014.
[3] Ross, S. *Introduction to Probability Models.* 2009.
[4] Ross, S. *A First Course in Probability.* 2009.
[5] DeGroot, M; Schervish, M. *Probability and Statistics.* 2012.
[6] Mood, A. *Introduction to the Theory os Statistics.* 1974.