

## Fundamentos Analíticos e Geométricos da Teoria de Hipersuperfícies

**Mateus Coelho Belinello (IC)**

### Resumo

Este projeto trata do estudo de existência e obtenção de estimativas para soluções de equações elípticas de segunda ordem totalmente não-lineares associadas a problemas geométricos. Trata-se de uma introdução a Análise Geométrica através da equação de Monge-Ampère. Para atingir tal objetivo foram estudados os fundamentos necessários de análise funcional, geometria diferencial e convexidade.

Palavras Chave: *Monge-Ampère, análise geométrica, convexidade.*

### Introdução

É frequente que certos problemas em geometria estejam associados a soluções de equações diferenciais parciais (EDPs). Em geral, problemas envolvendo curvatura se relacionam com equações não-lineares de segunda ordem, como é o caso do problema de Minkowski e do problema de Yamabe. Aqui estamos particularmente interessados em EDPs de segunda ordem altamente não-lineares advindas desse tipo de problema, como a equação de Monge-Ampère e as  $k$ -Hessianas.

Por envolverem produtos das derivadas de ordem mais alta, o conceito de soluções fracas de EDPs altamente não-lineares tem de ser cuidadosamente definido. Por isso estudamos o conceito de soluções de viscosidade e de soluções generalizadas no sentido de medida.

Devido a importância para questões de existência e regularidade de soluções fracas para o problema de Dirichlet, estudamos estimativas como as de Alexandrov-Pucci-Bakelman e a de Krylov-Safanov relativas a soluções desse tipo de equação. Além de princípios de máximo e de comparação, como é usual na teoria clássica de EDPs.

Estudamos a equação de Monge-Ampère como ponto de entrada para a teoria não-linear. Essa equação aparece naturalmente no contexto do problema de Minkowski, dada a função da curvatura Gaussiana de uma variedade imersa no espaço euclidiano, considerando uma parametrização local dada pelo gráfico de uma função, temos que essa função é solução da equação de Monge-Ampère.

Além disso, a elipticidade da equação de Monge-Ampère está diretamente ligada com a convexidade das soluções, portanto, o estudo da teoria de funções e conjuntos convexos também se faz necessário.

### Resultados e Discussão

Estudamos os conceitos de soluções fracas de viscosidade e no sentido de medida para a equação de Monge-Ampère, com o auxílio de princípios do máximo e de comparação pudemos demonstrar existência e unicidade de soluções para o problema de Dirichlet num domínio convexo. Além disso, como consequência da estimativa de Alexandrov-Pucci-Bakelman, pudemos estudar uma demonstração não-canônica da desigualdade isoperimétrica.

### Conclusões

Com as técnicas estudadas foi possível demonstrar resultados de existência de soluções para a equação de Monge-Ampère, que é uma EDP altamente não-linear, com aplicações em geometria conforme e transporte ótimo. Além disso, pudemos estudar uma demonstração não-canônica da desigualdade isoperimétrica.

### Agradecimentos

Agradeço a Olivaine de Queiroz pelo seu incentivo e disposição, e agradeço ao CNPQ por tornar este projeto possível.

Bakelman, I.J. Convex analysis and nonlinear geometric elliptic equations. (English summary) With an obituary for the author by William Rundell. Edited by Steven D. Taliaferro. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Boothby, W.M.: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Second edition. Pure and Applied Mathematics, 120. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.

De Philippis, G.; Figalli, A.: The Monge-Ampère equation and its link to optimal transportation. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 51 (2014), no. 4, 527â580.

Dugundji, J.: Topology. Reprinting of the 1966 original. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.-London-Sydney, 1978.

Folland, G.B.: Real analysis. Modern techniques and their applications. Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

Guan, P.: Topics in Geometric Fully Nonlinear Equations. Lecture Notes. [Gutiérrez, C.E.: The Monge-Ampère equation. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 44. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

Trudinger, N.S.; Wang, X.-J.: The Monge-Ampère equation and its geometric applications. Handbook of geometric analysis. No. 1, 467–524, Adv. Lect. Math. (ALM), 7, Int. Press, Somerville, MA, 2008.